

# การคำนวณการถ่ายเทความร้อนของแผ่นกลมวางบนพื้น โดยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์ด้วยชิ้นส่วนทรงกระบอกกลวง

Calculating Heat Transfer of a Circular Disk on the Floor

By Finite Resistance Method with Hollow Cylindrical Elements

ประเสริฐ อินประเสริฐ

อาจารย์ประจำ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสยาม

235 ถนนเพชรเกษม เขตภาษีเจริญ กรุงเทพฯ 10163 Prasert\_Inp@yahoo.com

## บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการคำนวณการถ่ายเทความร้อนโดยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์ด้วยชิ้นส่วนทรงกระบอก โดยการแบ่งพื้นออกเป็นชิ้นเล็ก ๆ ทรงกระบอกตันและทรงกระบอกกลวงวางซ้อนกันในแนวรัศมีเป็นจำนวนมาก แล้วรวมแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของตัวด้านทานการนำความร้อนทั้งแบบทรงกระบอกตันและทรงกระบอกกลวงมาประกอบเข้าด้วยกันเป็นโครงข่ายความร้อน แล้วใช้โปรแกรมมัลติซิมคำนวณแบบจำลองความต้านทานนี้เปรียบเทียบกับทฤษฎีของการนำความร้อนที่ใช้ค่าองค์ประกอบรูปร่างในการคำนวณเพื่อหาค่าความผิดพลาดของอัตราการถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้น เมื่อกำหนดให้วัตถุแผ่นกลมมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 24 mm อุณหภูมิผิว 400 K วางอยู่บนผิวแก้วที่มีพื้นผิวกว้างและหนามาก โดยกำหนดให้ผิวแก้วมีอุณหภูมิ 300 K ที่บริเวณไกลออกไปและค่าสภาพการนำความร้อนของแก้ว  $0.7 \text{ W/m}^\circ\text{C}$  เมื่อแบ่งเนื้อแก้วเป็นชิ้นเล็กจำนวน 588 ชิ้น ปรากฏว่ามีความผิดพลาด -3.87 % จากค่าความผิดพลาดแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองความต้านทานทางความร้อนแบบชิ้นส่วนทรงกระบอกนี้สามารถคำนวณโดยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์ได้ ซึ่งจะมีประโยชน์ในการแก้ปัญหากรณีการถ่ายเทความร้อน 3 มิติที่มีรูปร่างดูแล้วใกล้เคียงทรงกระบอกได้

**คำสำคัญ:** วิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์, ชิ้นทรงกระบอกกลวง, ทฤษฎีองค์ประกอบรูปร่าง

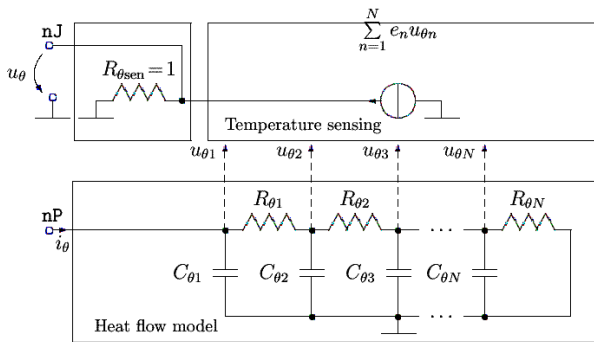
## Abstract

This paper presents to calculate heat transfer by finite resistance method with hollow cylindrical elements. By divide the floor into a small solid cylindrical element and many small hollow cylindrical elements and lay on radial direction which solid cylindrical element fixed on the center, combine a mathematical model of cylindrical conduction resistances and hollow cylindrical conduction resistances to a thermal network. Using MultiSIM™ software to calculate this network and compare with conduction shape factor theory to find an error of heat transfer rate. The calculation let a circular disk of 24 mm-diameter at surface temperature 400 K laid on a glass with vary large surface and very thickness. Let the glass have surface temperature is 300 K on the far area and a thermal conductivity of this glass is  $0.7 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ . When divide glass into 588 elements having an error result -3.87 %. From an error result show that this hollow cylindrical resistance model can be calculated by finite resistance method. It can be useful to solve a 3D heat transfer problem which a shape look like a cylinder.

**Keyword:** finite resistance method, hollow cylindrical element, shape factor theory

## 1. บทนำ

วิธีไฟไนต์วิธีสแทนซ์เป็นการคำนวณการถ่ายเทความร้อนซึ่งผลสมผสานแนวคิดมาจากวิธีไฟไนต์อิเลิเมนต์และเทอร์มอลวิธีสแทนซ์ประกอบเข้าด้วยกัน[7][10] ซึ่งในการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อน 1 มิติ ในสภาวะคงตัวแสดงให้เห็นว่าวิธีการนี้สามารถนำไปใช้ได้และให้ค่าความถูกต้องมากขึ้นเมื่อแบ่งจำนวนชั้นมากขึ้น [1] สำหรับการคำนวณการถ่ายเทความร้อนในสภาวะแปรเปลี่ยนชั่วขณะ (Transient) ได้มีการใช้โปรแกรมคำนวณวงจรไฟฟ้ามาคำนวณวงจรความร้อน [11] ดังรูปที่ 1

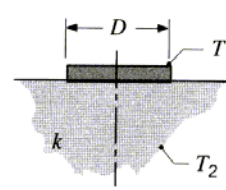


รูปที่ 1 วงจรไฟฟ้าของ Heat source ด้านล่าง สำหรับการคำนวณอุณหภูมิให้กับตัวเซนเซอร์ที่อยู่ด้านบน [11]

สำหรับบางกรณีจะใช้ทั้งสองวงจรคำนวณร่วมกันเนื่องจากการไหลของไฟฟ้ามีผลให้เกิดความร้อนในวงจรและความร้อนที่เกิดขึ้นในวงจรมีผลต่อการไหลของกระแสไฟฟ้าเช่นกัน[9] บางครั้งใช้ในการคำนวณปัญหาการถ่ายเทความร้อนเกี่ยวกับการสัมผัสกับของวัสดุ [4] สำหรับการคำนวณแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อน 2 มิติได้คำนวณเปรียบเทียบความถูกต้องแล้วกับวิธีองค์ประกอบรูปร่าง [2]

บทความนี้จะนำเสนอกรณีปัญหาการคำนวณถ่ายเทความร้อนที่เมื่อแบ่งชิ้นส่วนย่อยเป็นแบบลูกบาศก์ในพิกัดแกนตั้งฉาก (Cartesian coordinate) จะเป็นปัญหาแบบ 3 มิติ แต่ถ้านำชิ้นส่วนย่อยทรงกระบอกในพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical coordinate) มาใช้ ทำให้เป็นปัญหาแบบ 2 มิติได้ ซึ่งการนำชิ้นส่วนย่อยทรงกระบอกมาใช้มีผลให้ลดจำนวนชิ้นส่วนย่อยแบบลูกบาศก์ในพิกัดแกนตั้งฉากลงได้จำนวนมากและมีผลให้เวลาในการคำนวณน้อยลง เหมาะสำหรับปัญหาบางกรณีที่มีผิวมีความโค้งกลมหรือความกว้างไม่จำกัด

การคำนวณทดสอบความแม่นยำของแบบจำลองความต้านทานนี้ได้ทำการแบ่งพื้นที่ที่มีความหนาและบริเวณกว้างไม่จำกัดออกเป็นชิ้นเล็กๆรูปทรงกระบอกตันและทรงกระบอกกลวงซ้อนกันจำนวนมาก โดยมีแผ่นกลมวางที่ผิวด้านบนตรงแนวเดียวกับแกนทรงกระบอกตันของพื้นที่เรียงซ้อนกันตลอดความลึก กำหนดให้พื้นและแผ่นกลมทั้งสองชิ้นมีอุณหภูมิผิวที่แตกต่างกันเพื่อให้เกิดให้การถ่ายเทความร้อน แล้วทำการเปรียบเทียบกับผลการคำนวณจากทฤษฎีองค์ประกอบรูปร่าง ซึ่งมีเงื่อนไขและขอบเขตใกล้เคียงกับกรณีของ Disk on a semi-infinite medium และไม่พิจารณาความต้านทานความร้อนที่หน้าสัมผัส (Contact resistance) ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 แผ่นกลมวางบนพื้น (Disk on a semi-infinite medium)[5]

## 2. ทฤษฎีการถ่ายเทความร้อนขององค์ประกอบรูปร่าง

ในที่นี้จะกล่าวถึงการคำนวณการถ่ายเทความร้อนสำหรับแผ่นกลมวางบนพื้น [5] จากทฤษฎีองค์ประกอบรูปร่าง จะเห็นได้ว่าไม่ได้พิจารณาถึงความต้านทานความร้อนที่หน้าสัมผัสเนื่องจากไม่ใช่ประเด็นของทฤษฎีนี้ กล่าวคือในกรณีนี้เป็นการกำหนดให้พื้นผิวบริเวณหนึ่งที่เป็นพื้นที่วงกลมมีอุณหภูมิแตกต่างจากผิวบริเวณข้างเคียงรวมถึงพื้นผิวที่อยู่ติดลงไปอีกด้านหนึ่ง ซึ่งจะเห็นได้ว่าจำเป็นต้องทราบค่าสภาพการนำความร้อนของพื้นจึงจะคำนวณอัตราการถ่ายเทความร้อนได้

### 2.1 สมการการคำนวณอัตราการถ่ายเทความร้อน

อัตราการถ่ายเทความร้อนระหว่างอุณหภูมิผิวหน้าวัสดุในบริเวณที่กำหนดกับอุณหภูมิผิวหน้าวัสดุชิ้นเดียวกันในบริเวณอื่น คำนวณได้ดังนี้

$$\dot{Q} = Sk(T_2 - T_1) \quad (1)$$

เมื่อ  $\dot{Q}$  - อัตราการถ่ายเทความร้อน (W)

S - องค์ประกอบรูปร่างของการนำความร้อน

- k - สภาพการนำความร้อนเนื้อวัสดุ (W/m·°C)
- $T_1, T_2$  - อุณหภูมิผิววัสดุ 2 ด้าน โดยที่มีการกระจายอุณหภูมิเท่ากัน (Uniform temperature) (°C)

### 2.2 ค่าองค์ประกอบรูปร่าง

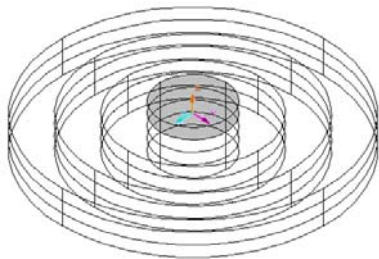
จากตารางองค์ประกอบรูปร่างในกรณีของ Circular disk on a semi-infinite medium [5]

$$S = 2D \quad (2)$$

เมื่อ D - เส้นผ่าศูนย์กลางแผ่นกลม (m)

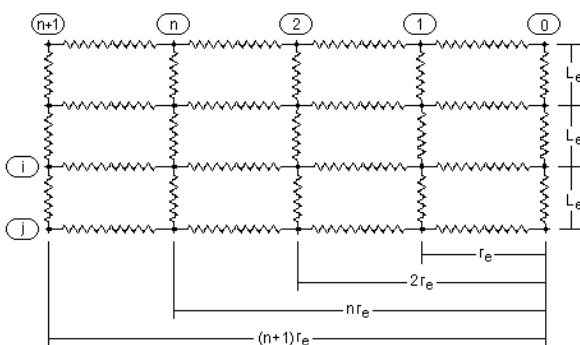
### 3. การวิเคราะห์แบบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

เพื่อให้เข้าใจโดยง่ายถึงวิธีการแบ่งเป็นชั้นส่วยย่อย จะแสดงการแบ่งพื้นออกเป็นจำนวน 12 ชั้น เริ่มโดยแบ่งพื้นออกเป็นทรงกระบอกตันที่อยู่ใต้แผ่นกลมโดยมีแกนอยู่ในแนวเดียวกันกับแกนแผ่นกลมที่อยู่ด้านบน และพื้นที่ที่เหลือให้แบ่งเป็นทรงกระบอกกลวงวางซ้อนกัน แสดงดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 แผ่นกลมวางบนพื้นที่แบ่งออกเป็นชั้นย่อยทรงกระบอกกลวง 9 ชั้น โดยมีแกนกลางเป็นทรงกระบอกตัน 3 ชั้น ซ้อนกัน

สามารถแปลงชั้นส่วยย่อยเป็นตัวต้านทานความร้อนดังรูปที่ 4

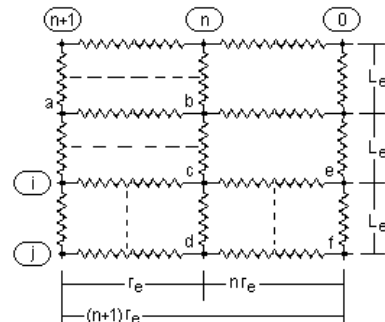


รูปที่ 4 Thermal Network ภายในเนื้อวัสดุเมื่อแบ่งเป็นทรงกระบอกกลวง 3 ชั้นต่อชั้น โดยมีแกนกลางเป็นทรงกระบอกตัน 1 ชั้นต่อชั้น

กำหนดให้การถ่ายเทความร้อนจากผิวทรงกระบอกกลวงด้านในมายังผิวด้านนอกมีได้ 2 แนวคือที่ขอบด้านบนและขอบด้านล่าง และกำหนดให้การถ่ายเทความร้อนจากขอบด้านบนมายังขอบด้านล่างของทรงกระบอกกลวงมีได้ 2 แนวคือที่ผิวด้านนอกและผิวด้านใน โดยทรงกระบอกกลวงชั้นเล็กๆแต่ละชั้นมีความสูงหรือความยาว  $L_e$  เท่ากันหมดซึ่งผลที่ได้จะเรียงตัวกันเป็นชั้นความหนา  $L_e$  นั้นเอง กำหนดให้รัศมีทรงกระบอกกลวงชั้นในสุดมีขนาดเท่ากับรัศมีทรงกระบอกตัน  $r_e$  และให้ความหนาทรงกระบอกกลวงทุกชั้นมีขนาด  $r_e$  เท่ากันหมดเพื่อให้ง่ายในการสร้างสมการคณิตศาสตร์

### 3.1 ตัวต้านทานการนำความร้อนในเนื้อวัสดุ

ค่าความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุมีได้ 4 รูปแบบคือการนำความร้อนในแนวรัศมีทรงกระบอกกลวง, การนำความร้อนในแนวรัศมีทรงกระบอกตัน, การนำความร้อนในแนวแกนทรงกระบอกกลวง และการนำความร้อนในแนวแกนทรงกระบอกตัน ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 การถ่ายเทความร้อนในเนื้อวัสดุ ที่บริเวณต่างๆ

#### 3.1.1 ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุในแนวรัศมีทรงกระบอกกลวง

พิจารณารายการถ่ายเทความร้อนระหว่างผิวทรงกระบอกแนวที่ n+1 ที่จุด a กับผิวทรงกระบอกแนวที่ n ที่จุด b ในกรอบเส้นประของรูปที่ 5 เพื่อหาค่าความต้านทานความร้อน ได้ค่าดังนี้ [8]

$$R_{HCCond, inside radial} = \frac{\ln(r_{n+1}/r_n)}{2\pi k L_e} = \frac{\ln[(n+1)/n]}{2\pi k L_e} \quad (3)$$

เมื่อ  $R_{\text{HCCond,inside radial}}$  - ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุของ  
ทรงกระบอกกลวงในแนวรัศมี ( $^{\circ}\text{C/W}$ )

$r_{n+1}, r_n$  - รัศมีด้านนอก และรัศมีด้านใน Element (m) ชนิด  
ทรงกระบอกกลวงที่ n

- n - หมายเลขทรงกระบอกกลวง จากรูปที่ 5
- k - สภาพการนำความร้อน ( $\text{W/m}\cdot^{\circ}\text{C}$ )
- $L_e$  - ความยาว Element (m)

3.1.2 ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุในแนวรัศมี  
ทรงกระบอกตัน

พิจารณาการถ่ายเทความร้อนระหว่างผิวทรงกระบอกตัน  
แนวที่ 1 กับแกนกลางทรงกระบอกตันแนวที่ 0 ของรูปที่ 4 เพื่อ  
หาค่าความต้านทานความร้อน เนื่องจากพื้นที่ผิวของแกนกลาง  
ทรงกระบอกมีค่าเป็น 0 ดังนั้นจึงไม่สามารถใช้สูตรการนำความ  
ร้อนของทรงกระบอกกลวงได้ จึงกำหนดให้มีการกระจาย  
อุณหภูมิเท่ากัน (Uniform temperature) นั่นคืออุณหภูมิที่  
แกนกลางทรงกระบอกเท่ากับอุณหภูมิที่ผิว ดังนั้นความ  
ต้านทานความร้อนจากผิวถึงแกนกลางจึงมีค่าเท่ากับศูนย์  
เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$R_{\text{SCCond,inside radial}} = 0 \quad (4)$$

เมื่อ  $R_{\text{SCCond,inside radial}}$  - ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุของ  
ทรงกระบอกตันในแนวรัศมี ( $^{\circ}\text{C/W}$ )

3.1.3 ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุในแนวแกน  
ทรงกระบอกกลวง

พิจารณาการถ่ายเทความร้อนแนวที่ n ระหว่างผิว  
ทรงกระบอกด้านบนของชั้น i จุด c และผิวทรงกระบอก  
ด้านล่างของชั้น j ที่ จุด d ในกรอบเส้นประของรูปที่ 5 เพื่อหา  
ค่าความต้านทานความร้อน ได้ค่าดังนี้ [6]

$$\begin{aligned} R_{\text{HCCond,inside length}} &= \frac{L_e}{k A_n} \\ &= \frac{L_e}{k \pi (r_{n+1/2}^2 - r_n^2)} \\ &= \frac{L_e}{2n \pi k r_e^2} \end{aligned} \quad (5)$$

เมื่อ  $R_{\text{HCCond,inside length}}$  - ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุ  
ของทรงกระบอกกลวงในแนวแกน ( $^{\circ}\text{C/W}$ )

$A_n$  - พื้นที่ในแนวตั้งฉากการถ่ายเทความร้อน ( $\text{m}^2$ )

$r_e$  - รัศมีทรงกระบอกตัน(m)

3.1.4 ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุในแนวแกน  
ทรงกระบอกตัน

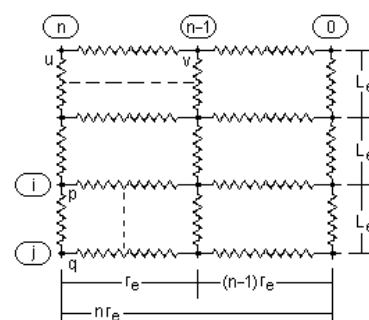
พิจารณาการถ่ายเทความร้อนแนวที่ 0 ระหว่างผิว  
ทรงกระบอกตันด้านบนของชั้น i ที่จุด e และผิวทรงกระบอก  
ด้านล่างของชั้น j ที่จุด f ในกรอบเส้นประของรูปที่ 5 เพื่อหาค่า  
ความต้านทานความร้อน ได้ค่าดังนี้ [6]

$$\begin{aligned} R_{\text{SCCond,inside length}} &= \frac{L_e}{k A_n} \\ &= \frac{4L_e}{\pi k r_e^2} \end{aligned} \quad (6)$$

เมื่อ  $R_{\text{SCCond,inside length}}$  - ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุ  
ของทรงกระบอกตันในแนวแกน ( $^{\circ}\text{C/W}$ )

### 3.2 ตัวต้านทานการนำความร้อนบริเวณขอบวัสดุ

จากรูปที่ 6 ค่าความต้านทานความร้อนบริเวณขอบวัสดุมี  
ไว้สำหรับการถ่ายเทความร้อนที่ผิวเพื่อแลกเปลี่ยนความร้อน  
กับวัสดุหรือตัวกลางอื่นๆ มีได้ 3 รูปแบบคือการถ่ายเทความ  
ร้อนในแนวแกนทรงกระบอกกลวง, การถ่ายเทความร้อนในแนว  
รัศมีทรงกระบอกกลวง และการถ่ายเทความร้อนในแนวรัศมี  
ทรงกระบอกตัน



รูปที่ 6 การถ่ายเทความร้อนบริเวณขอบเนื้อวัสดุที่บริเวณต่างๆ

3.2.1 ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุในแนวแกน  
ทรงกระบอกกลวง

พิจารณาการถ่ายเทความร้อนบริเวณขอบวัสดุแนวที่ n  
ระหว่างผิวทรงกระบอกด้านบนของชั้น i ที่จุด p และผิว  
ทรงกระบอกด้านล่างของชั้น j ที่จุด q ในกรอบเส้นประของรูปที่  
6 เพื่อหาค่าความต้านทานความร้อน ได้ค่าดังนี้ [6]

$$R_{HCCond,edge\ length} = \frac{L_e}{k A_n} = \frac{L_e}{k \pi (r_n^2 - r_{n-1}^2)} = \frac{L_e}{(n-0.25)\pi k r_e^2} \quad (7)$$

เมื่อ  $R_{HCCond,edge\ length}$  – ความต้านทานความร้อนขอบวัสดุของทรงกระบอกกลวงในแนวแกน ( $^{\circ}C/W$ )

3.2.2 ความต้านทานความร้อนขอบเนื้อวัสดุในแนวรัศมี ทรงกระบอกกลวง

พิจารณาการถ่ายเทความร้อนขอบวัสดุระหว่างผิวทรงกระบอกแนวที่ n ที่จุด u และผิวทรงกระบอกแนวที่ n-1 ที่จุด v ในกรอบเส้นประของรูปที่ 6 เพื่อหาค่าความต้านทานความร้อน จะเห็นได้ว่าเนื้อวัสดุบริเวณขอบมีเพียงครึ่งหนึ่งเมื่อเทียบการนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุ ดังนั้นค่าความต้านทานจึงเป็น 2 เท่าของความต้านทานภายใน จะได้ค่าดังนี้

$$R_{HCCond,edge\ radial} = 2 * R_{HCCond,inside\ radial} = \frac{\ln[(n+1)/n]}{\pi k L_e} \quad (8)$$

เมื่อ  $R_{HCCond,edge\ radial}$  – ความต้านทานความร้อนขอบวัสดุของทรงกระบอกกลวงในแนวรัศมี ( $^{\circ}C/W$ )

3.2.3 ความต้านทานความร้อนขอบเนื้อวัสดุในแนวรัศมี ทรงกระบอกตัน

ให้พิจารณาความต้านทานความร้อนเช่นเดียวกับในเนื้อวัสดุแนวรัศมีทรงกระบอกตัน จะมีค่าเท่ากับศูนย์ ได้ค่าดังนี้

$$R_{SCCond,edge\ radial} = 0 \quad (9)$$

เมื่อ  $R_{SCCond,edge\ radial}$  – ความต้านทานความร้อนขอบวัสดุของทรงกระบอกตันในแนวรัศมี ( $^{\circ}C/W$ )

#### 4. การคำนวณเปรียบเทียบ

กำหนดให้วัตถุแผ่นกลมมีอุณหภูมิผิว ( $T_1$ ) 400 K วางอยู่บนผิวแก้วที่มีบริเวณกว้างมาก กำหนดให้แก้วมีความหนา (Semi-infinite depth) ผิวหน้าของแก้วมีอุณหภูมิ ( $T_2$ ) 300 K และค่าสภาพการนำความร้อนของแก้ว (Glass, Lead or window) ( $k$ ) 0.7 W/m $^{\circ}C$ [9]

#### 4.1 คำนวณโดยใช้องค์ประกอบรูปร่าง

มีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1. คำนวณค่าองค์ประกอบรูปร่าง จากสมการที่ (2)

2. คำนวณอัตราการถ่ายเทความร้อนระหว่างวัตถุแผ่นกลม

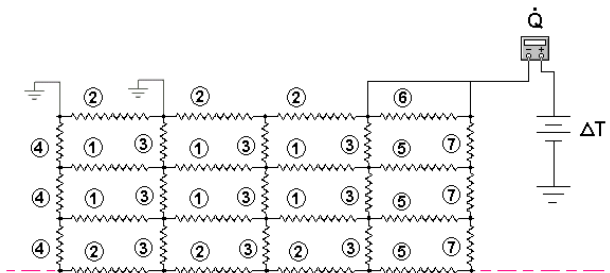
กับแก้ว จากสมการที่ (1)

ตารางที่ 1 รายการคำนวณวัตถุแผ่นกลมขนาดต่างๆ โดยวิธีองค์ประกอบรูปร่าง

รายการคำนวณ	D = 12 mm	D = 18 mm	D = 24 mm
S(m)	0.0024	0.0036	0.0048
$\dot{Q}$ (W)	1.680	2.520	3.360

#### 4.2 คำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

เริ่มต้นโดยแบ่งพื้นออกเป็นชั้นย่อย ดังรูปที่ 3 แล้วคำนวณและเขียนตัวต้านทานลงใน Electronic work sheet ในโปรแกรมมัลติซิม แสดงดังรูปที่ 7 แต่อย่างไรก็ตามสามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูปวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าอื่นๆได้เช่นกัน



- ①  $R_{HCCond,inside\ radial}$
- ②  $R_{HCCond,edge\ radial}$
- ③  $R_{HCCond,inside\ length}$
- ④  $R_{HCCond,edge\ length}$
- ⑤  $R_{SCCond,inside\ radial}$
- ⑥  $R_{SCCond,edge\ radial}$
- ⑦  $R_{SCCond,inside\ length}$

รูปที่ 7 วงจรไฟฟ้าในโปรแกรมมัลติซิม เมื่อแบ่งเป็นทรงกระบอกกลวง 3 อันต่อชั้น โดยมีแกนกลางเป็นทรงกระบอกตัน 1 อันต่อชั้น จำนวน 3 ชั้น รวมทั้งสิ้น 12 element

ซึ่งผลที่ได้แตกต่างจากทฤษฎีมาก จึงต้องแบ่งพื้นออกเป็นจำนวนชั้นที่มากขึ้น ซึ่งจะแสดงขั้นตอนการคำนวณอย่างละเอียดดังนี้

1. กำหนดให้แกนกลางทรงกระบอกตันของแก้วที่จะแบ่งอยู่แนวเดียวกับแกนกลางแผ่นกลมที่วางอยู่ด้านบน

2. แบ่งแก้วออกเป็นชั้นๆตามความลึกโดยแต่ชั้นหนา ( $L_e$ ) 1 mm. จำนวน 28 ชั้น แต่ละชั้นจะแบ่งเป็นชั้นวงแหวน เริ่มต้น

แบ่งชั้นแรกที่รัศมี( $r_e=r_1$ ) 3 mm. ที่บริเวณผิวทรงกระบอกตันพอดี เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณกำหนดการเพิ่มรัศมีวงแหวนคงที่ตลอดโดยมีความหนาทรงกระบอก( $r_i=r_1=r_e$ ) 3 mm. ทุกชั้นแบ่งไปจนได้จำนวน 20 ชั้น  $r_2=r_1+r_i=3$  mm.,  $r_3=r_1+2r_i=9$  mm.....,  $r_{21}=r_1+20*r_i=63$  mm. ในแต่ละชั้นเหมือนกันหมด โดยชั้นวงแหวนที่แบ่งได้แต่ละวงของแต่ละชั้นจะมีค่าหนา 1 mm. เมื่อมองเป็นชั้นทรงกระบอกกลวงจะได้ชั้นทรงกระบอกกลวงที่มีรัศมีนอกมากกว่ารัศมีใน( $r_i=r_1=r_e$ ) 3 mm. ทุกชั้น และมีความยาวทรงกระบอก(L) 1 mm. ดังนั้นจะได้ชั้นย่อยแบบทรงกระบอกกลวงจำนวน 560 ชั้น นอกจากนี้ยังมีชั้นย่อยรูปทรงกระบอกตันที่มีรัศมี( $r_e=r_1$ ) 3 mm. อีกจำนวน 28 ชั้น รวมทั้งสิ้น 588 ชั้น

3. คำนวณค่าความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุในแนวรัศมีของแต่ละชั้นย่อย

จากสมการที่ (4)

$$R_{SCCond0-1,inside\ radial} = 0\ ^\circ C/W$$

จากสมการที่ (3) เช่น

$$R_{HCCond1-2,inside\ radial} = 157.5968572519\ ^\circ C/W$$

$$R_{HCCond20-21,inside\ radial} = 11.09313685976\ ^\circ C/W$$

4. คำนวณความต้านทานความร้อนบริเวณขอบวัสดุในแนวรัศมี

จากสมการที่ (9)

$$R_{SCCond0-1,edge\ radial} = 0\ ^\circ C/W$$

จากสมการที่ (8) เช่น

$$R_{HCCond1-2,edge\ radial} = 315.1937145038\ ^\circ C/W$$

$$R_{HCCond20-21,edge\ radial} = 22.18627371951\ ^\circ C/W$$

5. คำนวณความต้านทานความร้อนในแนวแกนทรงกระบอกซึ่งเป็นความต้านทานความร้อนในแต่ละชั้นวัสดุ

จากสมการที่ (9)

$$R_{SCCond0i-0j,inside\ length} = 202.101515\ ^\circ C/W$$

จากสมการที่ (5) เช่น

$$R_{HCCond1i-1j,inside\ length} = 25.26268938\ ^\circ C/W$$

$$R_{HCCond20i-20j,inside\ length} = 1.263134469\ ^\circ C/W$$

6. คำนวณความต้านทานความร้อนบริเวณขอบวัสดุในแนวแกนทรงกระบอก

จากสมการที่ (7)

$$R_{HCCCond21i-21j,edge\ length} = 2.434958012\ ^\circ C/W$$

7. เขียนตัวต้านทานลงใน Electronic work sheet ในโปรแกรมมัลติซิม

8. คำนวณอัตราการถ่ายเทความร้อน ซึ่งค่ากระแสไฟฟ้าที่ได้คืออัตราการถ่ายเทความร้อน ผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมเป็นดังนี้

ตารางที่ 2 รายการคำนวณวัตต์แผ่นกลมขนาดต่างๆ โดยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

รายการคำนวณ	D = 12 mm	D = 18 mm	D = 24 mm
Element(ชั้น)	588	588	588
$\dot{Q}$ (W)	1.773	2.503	3.230

### 5. วิเคราะห์ผล

จากค่าความผิดพลาดที่แตกต่างจากทฤษฎี (%Error) โดยนำตารางที่ 2 มาหาค่าแตกต่างจากตารางที่ 1 ได้ค่าความผิดพลาดดังนี้

ตารางที่ 3 แสดงค่าความผิดพลาดที่แผ่นกลมขนาดต่างๆ

รายการคำนวณ	D = 12 mm	D = 18 mm	D = 24 mm
Error (%)	5.53571	-0.67460	-3.86904

สังเกตได้ว่าเมื่อหนดให้แผ่นกลมมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง (D) ใหญ่ขึ้นจาก 12 mm เป็น 18 mm โดยชั้นส่วนย่อยทรงกระบอกตันมีรัศมี ( $r_1$ ) 3 mm เท่าเดิม จะให้ค่าความผิดพลาดที่แตกต่างจากทฤษฎีน้อยลงจาก 5.53571% เหลือ -0.67460% นั่นคือเมื่อรัศมีทรงกระบอกตันมีขนาดเล็กกว่ารัศมีแผ่นกลมที่วางอยู่ 3 เท่า เสมือนว่าขนาดชั้นย่อยมีความละเอียดขึ้นโดยเปรียบเทียบกับแผ่นกลม ผลการคำนวณจะแม่นยำยิ่งขึ้น แต่ถ้าขนาดชั้นย่อยมีขนาดใหญ่เกินไปเมื่อเทียบกับแผ่นกลมทำให้มีค่าความผิดพลาดมากขึ้น และถ้าเพิ่มขนาดแผ่นกลมให้ใหญ่ขึ้นเป็น 24 mm ค่าความผิดพลาดกลับเพิ่มขึ้นมาอีก เนื่องจากขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางแผ่นกลมมีขนาดใหญ่ขึ้นเมื่อเทียบกับพื้นที่ว่างมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 63 mm นั่นเอง ทำให้ไม่ใกล้เคียงกับเงื่อนไขที่ว่าพื้นมีขนาดกว้างมาก

จากเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างมีค่า  $-3.86904\%$  เท่านั้น ซึ่งเป็นค่าที่ยอมรับได้ในเชิงวิศวกรรม แสดงให้เห็นว่าแบบจำลองความต้านทานทางความร้อนแบบชิ้นส่วนทรงกระบอกนี้สามารถคำนวณโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แทนที่ได้

## 6. สรุป

เมื่อกำหนดให้วัตถุแผ่นกลมมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง  $24\text{ mm}$  อุณหภูมิผิว  $400\text{ K}$  วางอยู่บนผิวแก้วที่มีพื้นผิวกว้างมาก กำหนดให้แก้วมีความหนา  $3\text{ mm}$  ผิวหน้าแก้วมีอุณหภูมิ  $300\text{ K}$  และค่าสภาพการนำความร้อนของแก้ว  $0.7\text{ W/m}\cdot\text{C}$  เมื่อแบ่งเนื้อแก้วเป็นชิ้นย่อยแบบทรงกระบอกกลมวงจรมีจำนวน  $560$  ชิ้น และชิ้นย่อยรูปทรงกระบอกตันมีจำนวน  $28$  ชิ้น ประกอบเข้าด้วยกันรวมทั้งสิ้น  $588$  ชิ้น มีความผิดพลาด  $-3.87\%$  จากค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองความต้านทานทางความร้อนแบบชิ้นส่วนทรงกระบอกนี้สามารถคำนวณโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แทนที่ได้ ซึ่งจะมีประโยชน์ในการแก้ปัญหากรณีการถ่ายเทความร้อน  $3$  มิติ ที่มีรูปร่างใกล้เคียงทรงกระบอกสามารถคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์  $2$  มิติ

นอกจากนี้เนื่องจากสูตรที่ใช้หาค่าองค์ประกอบรูปร่างเป็นสูตรที่ได้จากการทดลอง (Empirical formula) หรือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยวิธีสร้างเส้นกราฟไอโซเทอม (Isotherm) [3][5] และ ฟลไลน์ (Flowline)[3]/อเดียแบท (Adiabat)[5] ขึ้นมา ซึ่งมีความผิดพลาดจากการแปลงข้อมูลที่ได้ออกมาเป็นสูตรหรือสมการสั้นๆ พร้อมทั้งกำหนดเงื่อนไขการใช้สมการ (Restriction) เพื่อลดความผิดพลาด ดังนั้นค่าความผิดพลาดนี้อาจจะมากกว่าหรือน้อยกว่าค่าจริงเป็นจำนวนเท่าใดไม่ทราบได้ แต่สามารถนำแบบจำลองความต้านทานทางความร้อนแบบชิ้นส่วนทรงกระบอกนี้มาใช้ในการคำนวณทดแทนทฤษฎีองค์ประกอบรูปร่างได้ และเหมาะสมอย่างยิ่งสำหรับในบางปัญหาบางกรณีที่มีได้มีการหาสูตรค่าองค์ประกอบรูปร่างไว้

แต่อย่างไรก็ตามในสภาพที่เป็นจริงของวัตถุที่วางบนพื้นเป็นปัญหาการสัมผัสระหว่างผิวของแข็งด้วย ดังนั้นการคำนวณอัตราการถ่ายเทความร้อนจะต้องนำทฤษฎีความต้านทานความร้อนที่หน้าสัมผัสมาช่วยในการคำนวณกับทฤษฎีองค์ประกอบรูปร่าง ซึ่งถ้าคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถเพิ่มตัว

ด้านความร้อนหน้าสัมผัสลงไปในโครงข่ายความร้อน (Thermal network) ได้โดยง่ายเนื่องเป็นการคำนวณด้วยตัวต้านทานความร้อนเช่นเดียวกัน

## เอกสารอ้างอิง

- [1] ประเสริฐ อินประเสริฐ, พ.ศ. 2546. การคำนวณการถ่ายเทความร้อนผ่านครีบริบายความร้อนด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ กรณีปลายครีบริบายการถ่ายเทความร้อน, การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 17, หน้า 116-119
- [2] ประเสริฐ อินประเสริฐ, พ.ศ. 2547. การคำนวณการถ่ายเทความร้อนผ่านแท่งสี่เหลี่ยมมีรูกลวงกลมตลอดกึ่งกลางหน้าตัดด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์  $2$  มิติ, การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 18, หน้า 431-434
- [3] นักสิทธิ์ คุ้มวัฒนาชัย, พ.ศ. 2533. การถ่ายเทความร้อน, สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์, หน้า 55-64, 80
- [4] David M. Trujillo, Chris G. Poppoff, 1999. A General Thermal Contact Resistance Finite Element, <http://www.elsevier.com>, (Since January 2002)
- [5] Frank P. Incropera, David P. Dewitt, 2002. Introduction to heat transfer, School of Mechanical Engineering, Purdue University, U.S.A., Fourth Edition, John Wiley&Sons.Inc, Singapore, pp 194
- [6] Frank W. Schmidt, Robert E. Henderson, Carl H. Wolgemuth., 1993. Introduction to Thermal Sciences, The Pennsylvania State University, U.S.A., Second edition, John Wiley&Sons.Inc, Singapore, pp 318
- [7] Jan F. Kreider, Ari Rabl, 1994. Heating and Cooling of Buildings, University of Colorado at Boulder, U.S.A., McGraw-Hill. Inc, New York, pp 370-378
- [8] Jack P. Holman, 1997. Heat transfer, Southern Methodist University, U.S.A., Eighth Edition, McGraw-Hill. Inc, New York, pp 30
- [9] Martin Marz, Paul Nance, 2000. Thermal Modeling of Power-electronic Systems, Fraunhofer Institute for

Integrated Circuit,

[http://www.iisb.fraunhofer.de/de/arb\\_geb/pub\\_les/02\\_00.pdf](http://www.iisb.fraunhofer.de/de/arb_geb/pub_les/02_00.pdf),

(accessed on Oct 2005)

[10] Satish P. Ketkar, 1999. Numerical Thermal Analysis, The MacNeal-Schwendler Corporation, U.S.A., ASME Press, New York, pp 63-70

[11] Timo Veijola, Luis Costa, 1996. Combined Electrical and Thermal Circuit Simulation Using APLAC :Part C, Helsinki University of Technology, Aspoo Press, pp 21